1. Sea $f \in L(P_3, R^{2x2})$ tal que para $p = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ se tiene que $f(p) = B$ siendo B la que se indica. (a) Definir $g \in L(R^{2x2}$ tal que $gof = 0_L$ y que dim(Im(f)) + dim (Im(g)) = 4. (b) Sea W = {p∈P_3: p'(0) = 0}. Halle un subespacio S tal que S ⊂ W y S ⊕ gen{2–t+2t^3 } = Nu(f).

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -a_2 & a_0 - a_3 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}}$$

(a). Puesto que $g \, o \, f = 0_L$ debe ser[1] Im(f) ⊂ Nu (g) y como Im (f) = {A ∈R^{2x2} / $a_{11} + a_{22} = 0 \wedge a21 = 0$} resulta que para cumplir dim(Im(f)) + dim (Im(g)) = 4 debe ser[2] dim (Im(g)) = 2, resulta que[3] dim(Nu(g)) = 2 y de allí resulta que[4] Nu (g) = Im(f). Luego de esto todo se reduce a proponer una g que cumpla lo anterior, como podría ser la recuadrada, entre otras infinitas[5].

$$\boxed{g\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b). De la definición es claro que W = gen{ $q_1(t) = 1$, $q_2(t) = t^2$, $q_3(t) = t^3$} y de la definición de f también es inmediato[6] que Nu (f) = gen { $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 1 + t^3$ }, de modo que S es unidimensional[7], bastando elegir para generarlo un vector perteneciente a W que sea li con 2–t+2t^3 , pudiendo entonces ser, por ejemplo, S = gen {u(t) = t }. Si ahora quiere probarse que el S propuesto efectivamente satisface lo pedido puede probarse que[8] {t} ∪ {2–t+2t^3 } es base de Nu(f), o lo que es lo mismo que {t, 2–t+2t^3 } es base de Nu (f), lo que es inmediato[9].

2. Sea V_R un EV bidimensional en el que se ha definido el pi " • " y sean v_1, v_2 en V_R tales que $||v_1||^2 = 2$, $||v_2||^2 = 4$, $v_1 \bullet v_2 = -1$ y sea S = gen {v1 + v2 }. (a) Probar que B = { v_1, v_2 } es base de V_R y hallar $S^\perp$ (b) Hallar todos los x ∈ V cuya distancia a $S^\perp$ es 2.

(a). Para que B sea base de V debemos probar que B es li y que gen B = V. Probamos la independencia lineal planteando $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_v$ y de allí es $v_1 \bullet(\alpha v_1 + \beta v_2) = v_1 \bullet 0_v$ y $v_2 \bullet(\alpha v_1 + \beta v_2) = v_2 \bullet 0_v$ de donde[10] $2\alpha - \beta = 0 \wedge -\alpha + 4\beta = 0$, y de allí $\alpha = \beta = 0$, de modo que B es li. Ahora la generación: es claro que B es base de gen B, de modo que gen B es de dimensión 2, pero entonces[11] es gen B = V. Esto termina la prueba de que B es base de V.
Ahora, $S^\perp = \{x = \alpha v_1 + \beta v_2 \in V : (v_1 + v_2) \bullet (\alpha v_1 + \beta v_2) = 0 = \alpha + 3\beta\} = \text{gen}\{3v_1 - v_2\}$.

(b) Se pide el conjunto[12] H = {x ∈V : d (x, $S^\perp$)= 2}, esto es que deben cumplir $|| P_S(x) ||^2 = 4$, de modo que bastará hallar tal proyección; ahora bien, $\forall x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \in V : x = \alpha (v_1 + v_2) + \beta (3v_1 - v_2)$, o lo que es lo mismo $(\alpha + 3\beta - x_1) v_1 + (\alpha - \beta - x_2) v_2 = 0_v$ y por ser B li es $\alpha + 3\beta = x_1 \wedge \alpha - \beta = x_2$ de modo que es $\alpha = (1/4)(x_1 + 3x_2)$, $\beta = (1/4)(x_1 - 3x_2)$, y por lo tanto[13] $P_S(x) = (1/4)(x_1 + 3x_2)(v_1 + v_2)$, de modo que[14] tenemos $|| P_S(x) ||^2 = (1/4)(x_1 + 3x_2)^2 = 4$, resultando fialmente que $| x_1 + 3x_2 | = 4$, quedando finalmente el conjunto H = { $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \in V : | x_1 + 3x_2 | = 4$ }.

[1] Claro, puesto que cualquier polinomio debe tener una imagen por f que se halle en el núcleo de g, para que finalmente la composición sea la TL nula.
[2] Porque 2+2 = 4, Marley.
[3] Porque dim(Nu(g)) + dim (Im(g)) = dim(R^{2x2}) = 4 y por la nota anterior.
[4] Porque si S es un subespacio de dimensión k de un espacio V de dimensión k, entonces debe ser S = V.
[5] Cuando se pide una g se pretende una función que permita obtener la imagen de una cualquiera matriz de 2x2, y no una instrucción para obtenerla, como podría ser la definición de las imágenes sobre una base. Dicho de otro modo, al que pide agua se le alcanza un vaso con ella, no una instrucción para llenarlo.
[6] Creo puedo dejar las cuentas en manos de un mambrú.
[7] Porque 1+1=2, ya la suma directa permite sumar directamente las dimensiones.
[8] Por el resultado que afirma que dos subespacios están en suma directa sii la unión de dos cualesquiera de sendas bases es base de la suma.
[9] Normalmente encuentro que los alumnos consideran inútiles estas pruebas; confieso ignorar el dogma de fe que sustenta tanta inutilidad.
[10] Aplicando axiomas (¿cuáles?) y los datos.
[11] Ver nota de pie de página número 3.
[12] Claramente, H no puede ser un subespacio ¿porqué?
[13] Esto es por definición.
[14] Considerado que $||v_1 + v_2||^2 = 4$

3. Sea $T \in L(P_2, R^3)$ tal que para $B = \{ q_1(t) = 1 + t + t^2,\ q_2(t) = 1 + t,\ q_3(t) = 1\}$ $C = \{ v_1 = (1\ 0\ -1)^T,\ v_2 = (0\ 1\ 0)^T,\ v_3 = (1\ 0\ 0)^T \}$ siendo $A = [T]_{BC}$ como se indica. (a) Hallar todos los $\lambda \in R$ para los cuales T no es sobreyectiva. Para cada valor de λ hallado determinar si existe $p \in P_2$ tal que $T(p) = (0\ -1\ 1)^T$. (b) Para $\lambda = 0$ encontrar todos los $p \in P_2$ tal que hacen mínima la distancia entre T (p) y $w = (0\ -1\ 1)^T$, considerando el pic en R^3

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a). Puesto que T es no sobreyectiva sii dim (Im(T)) < 3 y dado que el rango de A es la dimensión de su espacio columna y éste coincide con la de la imagen de T, resulta que el tango de A es menor que tres, y por lo tanto su determinante debe ser nulo, pues en caso contrario su rango es 3. Luego bastará escribir $\det(A) = -3\lambda\ (\lambda + 1) = 0$, de modo que para todo $\lambda \in H = \{\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = -1\}$ T no es sobreyectivaLa segunda pregunta equivale a averiguar si $C_C\ (0\ -1\ 1)^T \in$ col (A) y como $(0\ -1\ 1)^T = -v_1 - v_2 + v_3$ esto es lo mismo que preguntar si $(-1\ -1\ 1)^T \in$ col (A), lo que no sucede para $\lambda_1 = 0$ pues en tal caso resulta que $\text{col}(A) = \{ x = (a\ b\ c)^T : b = 0\}$, mientras que sí para $\lambda_2 = -1$ pues en tal caso es $\text{col}(A) = \{ x = (a\ b\ c)^T : a - 3b - 2c = 0\}$.

(b). Llamando S a la Imagen de T, se trata de hallar el conjunto $\Omega = \{p \in P_2 : T(p) = P_S(w)\}$. Teniendo en cuenta que $S = \text{gen}\{ 2v_1 + v_3, v_1 + 2v_3\} = \text{gen}\{ v_1, v_3\}$ y observando que $S^{\perp} = \text{gen}\{v_2]$ resulta inmediato ver que $w = (-v_1 + v_3) + (-v_2)$, de modo que $P_S(w) = -v_1 + v_3$, y como entonces es $C_C(-v_1 + v_3) = (-1\ 0\ 1)^T$, podemos hallar los p pedidos como aquellos para los que $A\ C_B(p) = (-1\ 0\ 1)^T$ sistema cuya solución es $C_B(p) = \{(x\ y\ z)^T = \alpha\ (1\ -1\ -1)^T + (0\ 0\ -1)^T,\ \alpha \in R\}$, de modo que es $p = \alpha\ (q_1 - q_2 - q_3) - q_3$ resultando así el conjunto $\Omega = \{p \in P_2 : p(t) = \alpha\ (t^2 - 1) - 1$, con $\alpha \in R\}$.

4. (a)Comprobar que P es una matriz de proyección y factorizar $P = Q\,Q^T$ con Q tal que $Q^TQ = I$. (b)Encontrar $A \in R^{3x3}$ tal que $(-1\ 1\ 1)^T$ y $(1\ 1\ 0)$ pertenezcan a $\text{Nul}(a^T)$ y A admita una descomposiciómn QR normalizada con $R = [\ \sqrt{6}\ \ \sqrt{6}\ \ \sqrt{6}\ ]$, ¿Cuántas A existen es estas condiciones?

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(a). Se verifica de inmediato que $P^2 = P = P^T$ de modo que P es de proyección, y como su rango es 1 bastará elegir la(única) columna de Q como un versor que genere col(P), $Q = 1/\sqrt{6}\ \ (1\ -1\ 2)^T$ podría ser una. Es claro que $Q^TQ = 1$ y también que $P = QQ^T$.

(b). Como R tiene sólo una fila el rango de A es 1, de modo que un vector tal como $u = 1/\sqrt{6}\ \ (1\ -1\ 2)^T$ que es ortogonal[15] a Nul (A^T) genera col A y así tomando Q = u se tiene A = QR. Naturalmente, pudimos hacer Q = –u, y en tal caso A sería la anterior cambiada de signo, no habiendo más que este par que satisface el problema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

[15] El complemento ortogonal del $\text{Nul}(A^T)$ es col(A), y como col (A) es unidimensional, los vectores dados generan el $\text{Nul}(A^T)$.